

La verifica del risultato per migliorare le abilità nel problem solving

Liberato Cardellini

Già docente presso il Dipartimento SIMAU dell'Università Politecnica delle Marche
e-mail: l.cardellini21@outlook.it

Abstract. Some educational experiments were conducted to identify the difficulties students encounter in using familiar concepts such as density or in solving simple stoichiometric calculation problems and verifying the result. This article demonstrates how the systematic use of verification improves students' self-esteem and problem-solving skills.

Keywords: stima del risultato; verifica; motivazione; autostima; bilancio di carica; bilancio di massa

1. Introduzione

La capacità di risolvere problemi è un'abilità importante e necessaria per arricchire il percorso formativo degli studenti perché contribuisce in modo importante allo sviluppo delle abilità cognitive [1]. Le abilità cognitive di ordine elevato e la capacità di risolvere problemi sono considerate uno scopo importante e un traguardo necessario dell'istruzione scientifica [2]. Questo aspetto è stato evidenziato dall'affermazione che segue [3]: "It is difficult to imagine a more important educational objective than the teaching and learning of how to think more effectively."

Lo stesso concetto viene ribadito da John Anderson [4].

David Jonassen argomenta sull'importanza di risolvere problemi in quanto forma autentica di acquisizione della conoscenza [5]: "... problem solving is the most authentic and therefore the most relevant learning activity that students can engage in. ... research has shown that knowledge constructed in the context transferable. ... problem solving requires intentional learning. ... Therefore, the primary purpose of education should be to engage and support learning to solve problems."

La capacità di eseguire calcoli stechiometrici è un aspetto fondamentale nella formazione dei futuri chimici. Gli studenti, oltre al libro di testo preparano l'esame utilizzando anche il libro di stechiometria; il primo manuale di calcolo stechiometrico fu pubblicato quasi due secoli fa [6]. La ricerca educativa ha evidenziato le numerose difficoltà che gli studenti incontrano nell'acquisizione delle varie operazioni logiche necessarie, sia per eseguire i calcoli stechiometrici in modo corretto, che per la loro comprensione concettuale [7-22].

Come possiamo migliorare le capacità degli studenti nella soluzione dei problemi chimici? Nel suo famoso testo *How to Solve it*, Polya dà grande risalto alla verifica; quando si mette in pratica il piano risolutivo, "*check each step*: "Can you see clearly that the step is correct? Can you prove that it is correct?" Quando si controlla la soluzione ottenuta [23]: "Can you *check the result*? Can you check the argument?"

La verifica della soluzione del problema, di congetture e affermazioni, viene suggerita o presentata in molti testi che riguardano studi di matematica [24, 25] in cui "to prove" e "looking back" sono espressioni spesso ricorrenti. La riconsiderazione del risultato ottenuto, la sua verifica e la riesamina dei vari passaggi della risoluzione sembrano non rivestire molto interesse in altre discipline scientifiche, quasi la stessa cosa accade in chimica. L'unico esempio di discussione della verifica e della sua importanza si trova in un paragrafo riportato in *The Chemistry Classroom* [26]. Herron riporta i dati

di uno studio condotto da David Frank [27] su studenti di chimica in corsi di scienze e ingegneria. È interessante notare che, già all'epoca, era difficile convincere alcuni studenti a verificare la consistenza dei loro risultati.

Chi risolve i problemi con successo spesso impiega diverse strategie per verificare efficacemente la coerenza logica dei passaggi, delle procedure e delle conclusioni, nonché la loro corretta esecuzione. L'essere sicuri di aver risolto in modo corretto un problema contribuisce alla crescita della propria autostima. Il successo nella risoluzione dei problemi è un'emozione potente: innesca uno stato mentale che genera altre emozioni positive che alimentano l'interesse, la motivazione e il coinvolgimento degli studenti [28-34].

Riconsiderando e riesaminando il risultato e la consistenza logica dei vari passaggi che hanno permesso di ottenerlo, gli studenti possono diventare più sicuri e consapevoli del lavoro fatto, ma anche "consolidate their knowledge and develop their ability to solve problems" [35]. Poiché l'abilità a risolvere problemi è un aspetto importante della preparazione professionale in chimica, abituare gli studenti alla precisione nei calcoli e alla verifica del risultato contribuisce a migliorare la loro formazione.

2. Padroneggiare i calcoli stechiometrici

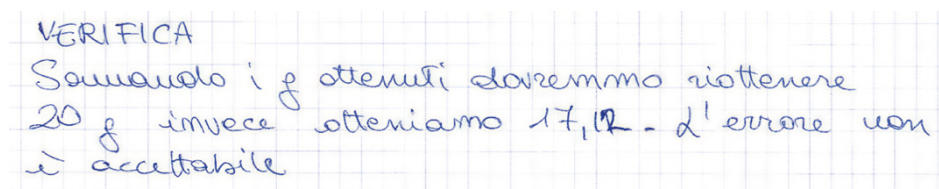
Con lo scopo di verificare le conoscenze nel calcolo stechiometrico degli studenti che arrivavano al mio corso di chimica al primo anno di università in una Facoltà di ingegneria, proponevo di risolvere il problema (1) di seguito riportato.

Problema (1)

10,00 g di carbonato di sodio (Na_2CO_3) vengono fatti reagire con 10,00 g di acido cloridrico (HCl). Calcolare i grammi di CO_2 , di acqua (H_2O) e di cloruro di sodio (NaCl) che si formano. Escogitare inoltre un metodo esaustivo per fare la verifica del risultato.

Alla lavagna veniva scritta l'equazione chimica e la massa molare (g/mol) di reagenti e prodotti e veniva suggerito di scrivere eventuali ipotesi fatte per giustificare i calcoli. Non è stato specificato che uno dei reagenti venisse completamente consumato, per vedere come gli studenti ragionassero. A questo esperimento hanno partecipato 67 studenti (26 donne e 41 uomini) suddivisi in 27 gruppi cooperativi.

Nella maggior parte delle soluzioni la verifica è stata basata sulla conservazione della massa e 19 soluzioni riportano la somma delle masse dei prodotti uguale a 20 grammi; in 4 soluzioni il procedimento di calcolo è risultato corretto, mentre 4 soluzioni sono risultate inconsistenti o non complete. In una delle soluzioni inconsistenti compare quanto riportato in figura 1.



VERIFICA
Sommando i g ottenuti dovremmo riottenere
20 g invece otteniamo 17,12 - l'errore non
è accettabile

Figura 1. I risultati della verifica non convincono gli studenti

La soluzione in parte corretta (calcolo del reagente limitante) è stata ritenuta inconsistente per via di alcuni ragionamenti utilizzati. Ad esempio, l'acqua prodotta è stata calcolata come segue:

$$(10,00 \text{ g HCl}) / (36,46 \text{ g HCl/mol HCl}) = 2,74 \times 10^{-1} \text{ mol HCl} = \text{mol H}$$

$$\text{moli O in H}_2\text{O} = 2,74 \times 10^{-1} \text{ mol H} / 2 = 1,37 \times 10^{-1} = \text{mol O} = 1,37 \times 10^{-1} \text{ mol H}_2\text{O}$$

$$1,37 \times 10^{-1} \text{ mol H}_2\text{O} = (1,37 \times 10^{-1} \text{ mol H}_2\text{O}) \times (18,02 \text{ g H}_2\text{O/mol H}_2\text{O}) = 2,47 \text{ g H}_2\text{O}$$

In un'altra soluzione ritenuta inconsistente, il calcolo delle moli di HCl è stato eseguito secondo il ragionamento riportato in figura 2.

$$\begin{aligned} \text{Se } 2\text{HCl} &= 10,00 \text{ g} & \text{HCl} &= 5,00 \text{ g} \\ \text{mol HCl} &= \frac{5,00 \text{ g}}{36,458 \text{ g/mol}} & &= 13,71 \cdot 10^{-2} \text{ mol HCl} \end{aligned}$$

Figura 2. Se $2\text{HCl} = 10,00 \text{ g}$, allora la massa di HCl diventa $5,00 \text{ g}$

Con l'intento di suggerire agli studenti in modo indiretto il ragionamento del calcolo stechiometrico necessario per risolvere in maniera corretta questo problema è stata successivamente presentata la metafora del panino e, poi, chiesto nuovamente di risolvere lo stesso problema. Praticamente tutti i gruppi hanno svolto un ragionamento risolutivo corretto, con qualche errore di calcolo o nell'uso delle cifre significative.

3. La metafora del panino

Consideriamo ora questo problema:

Si hanno a disposizione 10 fette di pane, 10 fette di salame e 10 foglie di lattuga; si confezionano panini con 2 fette di pane (F), 3 fette di salame (S) e 1 foglia di lattuga (L). Qual è il numero massimo di panini (P) che con questi ingredienti si possono fare?

In simboli, indicando con **p** la situazione prima del confezionamento e con **d** la situazione dopo aver prodotto i panini, si ha:

	2F	+	3S	+	L	→	P
p	10		10		10		0

l'esperienza ci dice che si possono avere tre panini, non 4; altrimenti la quantità S diverrebbe negativa, mentre la necessità fisica impone che la massa non sia negativa. Allora, quale è il numero di panini che rende nulla la quantità di uno (o più) reagenti? Indichiamo con **r** le operazioni che formano il panino: per ogni **r** si ha un panino prodotto. L'espressione formale indica che, per ogni panino, F diminuisce di 2 unità, S di 3 unità e L diminuisce di 1 unità. Utilizzando il formalismo adottato, possiamo scrivere:

	2F	+	3S	+	L	→	P
p	10		10		10		0
d	$10 - 2r$		$10 - 3r$		$10 - r$		r

Il valore di **r** viene calcolato imponendo il limite fisico:

$$10 - 2r \geq 0$$

$$10 - 3r \geq 0$$

$$10 - r \geq 0$$

Il valore $r = 10/3 = 3,3$ soddisfa le tre disequazioni. Si ottengono perciò 3,3 panini ($r = 3,3$) e, dopo aver confezionato tutti i panini possibili, si ha la situazione rappresentata dall'ultima riga della tabella:

	2F	+	3S	+	L	→	P
p	10		10		10		0
d	$10 - 2r$		$10 - 3r$		$10 - r$		r
d	3,4		0		6,7		3,3

Il componente S, che per primo va a zero, in una reazione chimica è il *reagente limitante*. La quantità massima di prodotto che si può ottenere in una certa reazione è stabilita dal reagente limitante e non dipende dai componenti F ed L che sono in eccesso. Per poter fare un ragionamento quantitativo sulle reazioni chimiche è, pertanto, necessario identificare prima di tutto il reagente limitante.

Ovviamente un ragionamento analogo può essere fatto in tutte le situazioni ove esiste una relazione stechiometrica. L'uso di questa analogia si è dimostrato negli anni sufficiente ed efficace per introdurre il concetto del reagente limitante e per fare padroneggiare agli studenti il calcolo stechiometrico [36].

4. Altre soluzioni con altri errori

Vengono riportati i risultati della soluzione del problema (1), scegliendo due corsi con risultati simili e piuttosto elevati nel test GALT (Group Assessment of Logical Thinking) [37]. Questo test, il cui punteggio massimo è 24, è ritenuto affidabile nel predire il successo in chimica [38, 39]. Per il corso A, composto da 48 studenti (16 donne e 32 uomini), il punteggio medio nel GALT è $17,79 \pm 3,30$ (da 10 a 24), mentre per il corso B, composto da 91 studenti (5 donne e 86 uomini), il punteggio medio nel GALT è $17,08 \pm 4,55$ (da 5 a 23).

Questi studenti, risolvendo il problema in gruppi cooperativi, hanno prodotto 47 soluzioni. Tra queste, 4 soluzioni sono risultate corrette e soddisfano la verifica, 7 soluzioni sono inconsistenti o incomplete, 24 soluzioni hanno trovato 20,00 g di prodotti. Questo è un errore tra i più ricorrenti e una delle strategie usate nella soluzione è quella di calcolare i grammi di Na_2 , C, e O_3 , contenuti in 10,00 g di Na_2CO_3 , e i grammi di H e Cl in 10,00 g di HCl. Poi, le quantità di ciascuno dei prodotti vengono ottenute sommando quanto calcolato in precedenza, come riportato in figura 3.

$$\text{g di } 2\text{NaCl} = 14,06 \text{ g} = 9,72 + 4,34$$

Figura 3. Calcolo della quantità di '2' NaCl, come somma dei grammi di Na e Cl dei reagenti

Un altro errore ricorrente, che compare in 5 soluzioni, è quello di considerare 30,00 g di reagenti; 10,00 g di HCl diventano 20,00 g per via del coefficiente 2 nell'equazione bilanciata (Figura 4).

$$\begin{aligned} \text{moli di HCl} &= \frac{10 \text{ g}}{36,46 \text{ g/mol}} = 0,274 \text{ moli} \\ \text{moli di } 2\text{HCl} &= 0,274 \text{ mol} \cdot 2 = 0,548 \text{ moli} \end{aligned}$$

Figura 4. Moli di '2' HCl, raddoppiate a causa del coefficiente 2 nell'equazione bilanciata

Da 20,00 g di reagenti come è possibile formare 41,39 g di prodotti? In 4 delle soluzioni prodotte è avvenuto questo "miracolo"; un esempio è riportato in figura 5.

$$\begin{array}{l}
 \text{Na}_2\text{CO}_3 + 2\text{HCl} \\
 \frac{10,09}{166} = 0,0943 \quad \frac{10}{79,92} = 0,1371 = 0,2314 \text{ mol} \\
 58,44 + 18,02 + 44,01 = 178,92 \\
 178,92 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 0,2314 \text{ mol} = 41,399 \text{ g}
 \end{array}$$

Figura 5. Secondo questo procedimento stringato, la massa dei prodotti è 41,399 g

La somma delle moli che compare in altre 3 soluzioni, può dare luogo a ulteriori risultati (Figura 6).

$$\begin{array}{l}
 n_{(\text{NaCl})} = \frac{58,44}{178,92} \rightarrow n_{(\text{NaCl})} = 0,12 \text{ moli} \\
 n_{(\text{H}_2\text{O})} = \frac{18,02}{178,92} \rightarrow n_{(\text{H}_2\text{O})} = 0,03 \text{ moli} \\
 n_{(\text{CO}_2)} = \frac{44,01}{178,92} \rightarrow n_{(\text{CO}_2)} = 0,089 \text{ moli} \\
 m_{(\text{NaCl})} = n_{(\text{NaCl})} \cdot 58,44 = 7,01 \text{ g} \\
 m_{(\text{H}_2\text{O})} = n_{(\text{H}_2\text{O})} \cdot 18,02 = 0,54 \text{ g} \\
 m_{(\text{CO}_2)} = n_{(\text{CO}_2)} \cdot 44,01 = 3,91 \text{ g}
 \end{array}$$

Figura 6. Dopo aver fatto la somma delle moli dei reagenti, è stato utilizzato un procedimento “fantasioso” per il calcolo dei prodotti

Da quanto ora visto risulta che per gli studenti che hanno conseguito il diploma della scuola superiore le conoscenze (o il loro ricordo) del calcolo stechiometrico sono piuttosto limitate. A ulteriore prova viene riportato quanto viene affermato in un'altra soluzione ritenuta inconsistente: “Divido il numero di moli per il numero di atomi presenti nella molecola” (Figura 7).

$$\begin{array}{l}
 \text{Divido il numero di moli per il numero di atomi presenti nella molecola:} \\
 0,09 : 6 = 0,015 \quad 0,27 : 4 = 0,068
 \end{array}$$

Figura 7. Il numero di atomi è 6 per Na_2CO_3 e 4 per 2HCl

Una lista contenente anche altri errori commessi nella soluzione di questo problema è stata in precedenza riportata [40]. Si può, perciò, affermare che tutti gli studenti ricordano la legge della conservazione della massa, ma la maggior parte non ricorda il ragionamento appreso per applicarla in modo corretto e presenta robuste lacune nel padroneggiare la logica chimica.

5. La stima e il processo di verifica

Sono state inoltre evidenziate le differenze tra la capacità di risolvere i problemi da parte di un esperto e di un novizio [41], fra le quali esistono due differenze significative importanti. L'esperto, infatti, è in grado 1) di eseguire l'analisi del problema in modo più completo, pianificando la

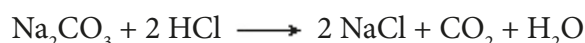
risoluzione prima di iniziare a svolgere i calcoli, e 2) di usare strategie risolutive più potenti e in maniera più efficace rispetto agli studenti. La sicurezza con la quale un esperto affronta un problema (esercizio) deriva dal fatto che già conosce l'ordine di grandezza del risultato e, in modo più o meno conscio, esegue continuamente la verifica rispetto ai risultati che ottiene nei vari passaggi. Perciò la stima del risultato dovrebbe costituire un altro strumento logico a disposizione dello studente.

Dal libro che gli studenti utilizzano per il calcolo stechiometrico si legge:

“Vengono riportate alcune osservazioni logiche, che possono aiutare gli studenti a stabilire una risposta stimata. Il numero di moli (n) può essere minore, maggiore o uguale a 1, a seconda dei grammi e del peso molecolare; se i grammi sono minori del peso molecolare, n deve risultare minore di 1; dall'applicazione della legge di Boyle a una compressione, deve risultare una diminuzione di volume; il numero di atomi (o di molecole) in un qualunque campione, piccolo a piacere, dovrà risultare un numero enorme, perché proporzionale alla costante di Avogadro. ... Ancora, il peso molecolare medio sarà compreso tra quello del componente con peso molecolare minore e quello del componente con peso molecolare maggiore: nel caso che il miscuglio sia formato da due componenti, il valore del peso molecolare medio deve risultare essere più vicino a quello del componente presente in numero di moli maggiore. ... In una reazione chimica, le masse dei prodotti non possono mai essere maggiori di quelle dei reagenti; le variazioni dovute alle proprietà colligative sono in genere “piccole”, comunque proporzionali al numero di moli. Per gli equilibri, il valore della costante è decisivo per stabilire l'ordine di grandezza del grado di avanzamento della reazione; $K \gg 1$, indica che la reazione va a completamento. In ogni caso il valore di r , moli di reazione che avvengono [42], deve essere compreso in un intervallo numerico che lo studente è sempre in grado di determinare. Nel caso $K \ll 1$, ci si deve attendere valori di r molto piccoli. Queste semplici osservazioni logiche, che dovranno essere rilette a tempo debito, possono aiutare lo studente a evitare errori numerici nella risoluzione del problema e con la verifica potrà confermare che il risultato ottenuto è corretto” [43].

Vediamo ora la soluzione completa del problema (1), con il processo della verifica.

La reazione che avviene è la seguente:



La verifica dell'equazione bilanciata si fa con la tabella del bilanciamento:

Atomo	Na	C	O	H	Cl
Reagenti	2	1	3	2	2
Prodotti	2	1	3	2	2

Poiché l'equazione chimica bilanciata indica il numero delle moli di reazione, si calcola questo numero per quanto riguarda i reagenti che vengono mescolati:

$$\text{Moli di Na}_2\text{CO}_3 \text{ contenute in } 10,00 \text{ g} = (10,00 \text{ g Na}_2\text{CO}_3) / (106,0 \text{ g Na}_2\text{CO}_3 / \text{mol Na}_2\text{CO}_3) = 9,434 \times 10^{-2} \text{ mol Na}_2\text{CO}_3$$

$$\text{Moli di HCl contenute in } 10,00 = (10,00 \text{ g HCl}) / (36,46 \text{ g HCl} / \text{mol HCl}) = 2,743 \times 10^{-1} \text{ mol HCl}$$

A questo punto, occorre identificare il reagente limitante e, quindi, calcolare le moli di reazione che avvengono.

Indicando con **p** la situazione prima che la reazione abbia luogo e con **d** la situazione dopo che la reazione è avvenuta, si ha:

	Na_2CO_3	+	2HCl	$\longrightarrow$	2NaCl	+	CO_2	+	H_2O
p	$9,434 \times 10^{-2}$		$2,743 \times 10^{-1}$		0		0	0	0
d	$9,434 \times 10^{-2} - r$		$2,743 \times 10^{-1} - 2r$		$2r$		r		r

Poiché r rappresenta le moli di reazioni che avvengono il suo campo di esistenza è: $0 < r \leq 9,434 \times 10^{-2}$. Il valore si determina imponendo le condizioni:

$$9,434 \times 10^{-2} - r \geq 0$$

$$2,743 \times 10^{-1} - 2r \geq 0$$

Il valore $r = 9,434 \times 10^{-2}$ soddisfa entrambe le disequazioni e, pertanto il carbonato di sodio è il reagente limitante.

Avvengono $9,434 \times 10^{-2}$ moli di reazione e dopo, che la reazione è avvenuta, si ha la situazione descritta dall'ultima riga della tabella sotto riportata.

	Na_2CO_3	+	2HCl	$\longrightarrow$	2NaCl	+	CO_2	+	H_2O
p	$9,434 \times 10^{-2}$		$2,743 \times 10^{-1}$		0		0	0	0
d	$9,434 \times 10^{-2} - r$		$2,743 \times 10^{-1} - 2r$		$2r$		r		r
d	0		$8,562 \times 10^{-2}$		$1,887 \times 10^{-1}$		$9,434 \times 10^{-2}$		$9,434 \times 10^{-2}$

È ora possibile calcolare le quantità ottenute dei vari prodotti

$$1,887 \times 10^{-1} \text{ mol NaCl} = (1,887 \times 10^{-1} \text{ mol NaCl}) \times (58,44 \text{ g NaCl/mol NaCl}) = 11,03 \text{ g NaCl}$$

$$9,434 \times 10^{-2} \text{ mol CO}_2 = (9,434 \times 10^{-2} \text{ mol CO}_2) \times (44,01 \text{ g CO}_2/\text{mol CO}_2) = 4,152 \text{ g CO}_2$$

$$9,434 \times 10^{-2} \text{ mol H}_2\text{O} = (9,434 \times 10^{-2} \text{ mol H}_2\text{O}) \times (18,02 \text{ g H}_2\text{O/mol H}_2\text{O}) = 1,700 \text{ g H}_2\text{O}$$

Verifica

$$\text{Massa dei prodotti ottenuti} = 11,03 \text{ g NaCl} + 4,152 \text{ g CO}_2 + 1,700 \text{ g H}_2\text{O} = 16,88 \text{ g}$$

$$\text{Massa dei reagenti che hanno reagito: } 10,00 \text{ g Na}_2\text{CO}_3 + 6,879 \text{ g HCl} = 16,88 \text{ g}$$

Tenendo conto delle cifre significative, la verifica è soddisfatta.

La verifica del bilanciamento delle equazioni è un'operazione utile e necessaria per le reazioni più complesse e gli studenti possono gioire per aver superato qualche sfida e acquisito delle abilità, come risulta dalla figura 8. Lo studente esulta perché attraverso la tabella del bilanciamento ha la certezza di avere bilanciato in modo corretto una reazione redox che riteneva difficile. Questo successo contribuisce a sviluppare l'autoefficacia, costrutto importante per la riuscita accademica [44].

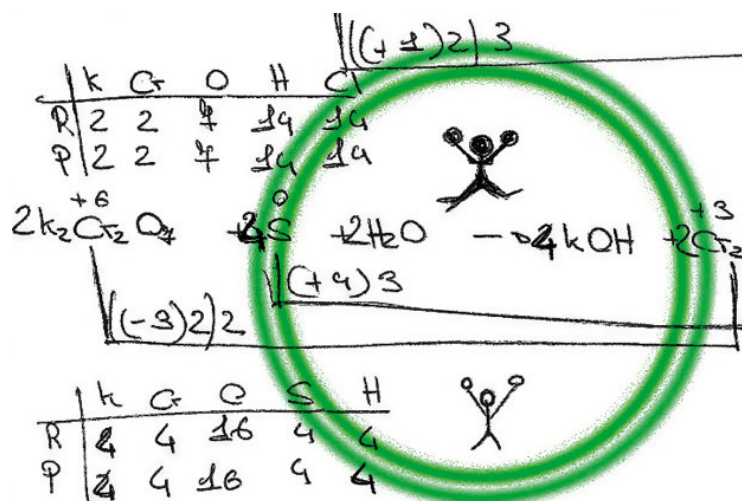


Figura 8. Uno studente esulta perché è riuscito a bilanciare una reazione redox

Non è sempre possibile eseguire una verifica numerica esaustiva e, allora, in questi casi vanno tenute presenti queste domande:

- 1) Ha senso questo risultato?
- 2) L'ordine di grandezza del risultato è ragionevole?
- 3) Sono corrette le unità di misura?

Ora vediamo un esempio di un processo di verifica non esaustivo.

Consideriamo il problema (2) che per molti studenti risulta essere difficile da risolvere [45].

Problema (2)

10,00 mL di una soluzione di H_2SO_4 al 2,485% in peso (densità 1,015 g/mL) vengono diluiti a 100,0 mL. Calcolare quanti millilitri di NaOH $1,000 \times 10^{-2}$ M sono necessari per neutralizzare 20,00 mL della soluzione di H_2SO_4 prima preparata.

Nel tentativo di facilitare la soluzione corretta, è stato suggerito di risolvere prima il problema (3), analogo, ma con un carico cognitivo minore [46-48].

Problema (3)

10,00 mL di una soluzione contengono $5,044 \times 10^{-2}$ g di H_2SO_4 vengono diluiti a 100,0 mL. Calcolare quanti millilitri di NaOH $1,000 \times 10^{-2}$ M sono necessari per neutralizzare 20,00 mL della soluzione di H_2SO_4 prima preparata.

Alcuni studenti hanno risolto soltanto uno dei problemi proposti; 65 soluzioni del problema (2) con 28 risultati sbagliati (da 2×10^{-3} mL a 1.870 mL) e 69 soluzioni del problema (3) con 28 risultati sbagliati (da 1,03 mL a 10.280 mL); 21 studenti hanno sbagliato le soluzioni di entrambi i problemi. Stimare l'ordine di grandezza del risultato in questi problemi è difficile anche per noi insegnanti; come è possibile eseguire una verifica per quanto possibile indipendente dalla soluzione trovata? Facciamo la verifica del problema (2), che, dall'analisi di migliaia di problemi risolti, è difficile da risolvere risulta correttamente da parte di molti studenti.

Risolvendo il problema con un procedimento analogo a quelli riportati nei testi di calcolo stechiometrico, il volume necessario di NaOH $1,000 \times 10^{-2}$ M è 102,8 mL. La soluzione che segue è analoga a quella utilizzata da uno studente e suddivisa in diversi passaggi, commentati [45].

1. Calcolo dei grammi di soluzione (g slz) di H_2SO_4

Conoscendo il volume della soluzione e la sua densità, si può dire che:

$$\text{g slz} = (10,00 \text{ mL slz}) \times (1,015 \text{ g slz / mL slz}) = 10,15 \text{ g slz}$$

2. Calcolo dei grammi di H_2SO_4 contenuti nella soluzione
Sapendo che la percentuale in peso è pari al 2,485%, si può dire che in 100,0 g di soluzione ci sono 2,485 g di H_2SO_4 , per cui con una proporzione si possono calcolare i grammi (x) di H_2SO_4 contenuti in 10,15 g slz:

$$100,0 \text{ g slz} : 2,485 \text{ g H}_2\text{SO}_4 = 10,15 \text{ g slz} : x \text{ g H}_2\text{SO}_4$$

$$x \text{ g H}_2\text{SO}_4 = 2,522 \times 10^{-1} \text{ g H}_2\text{SO}_4$$
3. Calcolo delle moli di H_2SO_4 contenute in 10,15 g slz (e in 10,00 mL slz)

$$\text{mol H}_2\text{SO}_4 = (2,522 \times 10^{-1} \text{ g H}_2\text{SO}_4) / (98,09 \text{ g H}_2\text{SO}_4 / \text{mol H}_2\text{SO}_4) = 2,571 \times 10^{-3} \text{ mol H}_2\text{SO}_4$$
4. Calcolo delle moli di H_2SO_4 contenute in 20,00 mL di soluzione
Poiché il numero di moli di H_2SO_4 contenute in 10,00 mL è lo stesso nella soluzione diluita a 100,0 mL, allora nei 20,00 mL di soluzione considerati il numero di moli è pari a:

$$100,0 \text{ mL slz} : 2,571 \times 10^{-3} \text{ mol H}_2\text{SO}_4 = 20,00 \text{ mL slz} : x \text{ mol H}_2\text{SO}_4$$

$$x = 5,142 \times 10^{-4} \text{ mol H}_2\text{SO}_4$$
5. Calcolo delle moli di NaOH necessarie, tenendo presente che ‘neutralizzare’ è una parola del linguaggio chimico e significa “reagire completamente con”.
Per calcolare le moli necessarie si deve considerare la reazione che avviene tra H_2SO_4 e NaOH

$$\text{H}_2\text{SO}_4 + 2 \text{ NaOH} \longrightarrow \text{Na}_2\text{SO}_4 + 2 \text{ H}_2\text{O}$$
Sapendo che H_2SO_4 è il reagente limitante, le moli di reazione (mol rzn) che avvengono sono pari a $5,142 \times 10^{-4} \text{ mol rzn}$, per cui, tenendo conto del rapporto stechiometrico, si ha:

$$\text{moli di NaOH} = (5,142 \times 10^{-4} \text{ mol rzn}) \times (2 \text{ mol NaOH} / 1 \text{ mol rzn}) = 1,028 \times 10^{-3} \text{ mol NaOH}$$
6. Calcolo del volume di NaOH necessario
Sapendo che la molarità della soluzione di NaOH è $1,000 \times 10^{-2} \text{ M}$ e ricordando che $M = n \text{ moli NaOH} / V \text{ (L slz)}$ e, quindi, anche che $V \text{ (L slz)} = n \text{ moli NaOH} / M$, si ottiene:

$$V \text{ (L slz)} = (1,028 \times 10^{-3} \text{ mol NaOH}) / (1,000 \times 10^{-2} \text{ mol NaOH} / \text{L slz}) = 1,028 \times 10^{-1} \text{ L} = 102,8 \text{ mL}$$

Suddividendo in più passaggi, spiegando, argomentando e rendendo visibile il ragionamento si diminuisce il carico cognitivo e si ha una traccia per controllare la connessione logica e verificare la correttezza del ragionamento. Per evitare il sovraccarico della memoria di lavoro gli studenti spesso ricorrono a una rappresentazione visiva del problema e un esempio è riportato nella figura 9.

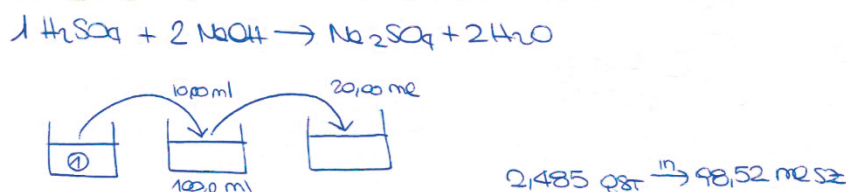


Figura 9. Rappresentazione di tre informazioni contenute nel problema; una rappresentazione corretta rende più facile il ragionamento poiché riduce il sovraccarico della memoria di lavoro

Di seguito è riportato un procedimento possibile per validare o falsificare questo risultato.
Quante sono le moli di NaOH contenute in 102,8 mL di soluzione $1,000 \times 10^{-2} \text{ M}$?

$$\text{Moli di NaOH} = (102,8 \text{ mL}) \times (1,000 \times 10^{-2} \text{ mol/L}) \times (10^{-3} \text{ L/mL}) = 1,028 \times 10^{-3} \text{ mol NaOH}$$

Avviene la reazione:



dal cui bilanciamento risulta che 2 moli NaOH reagiscono con 1 mole H_2SO_4 ; in termini più formali possiamo scrivere la relazione come rapporto stechiometrico 1 mol $\text{H}_2\text{SO}_4 \sim 2 \text{ mol NaOH}$. Il rapporto

stechiometrico è uno dei tre passaggi in cui vengono commessi più errori logici. In questo studio, la metà o il doppio del risultato corretto compare 7 volte nelle soluzioni del problema (2) e 11 volte nelle soluzioni del problema (3); viene così dimostrata l'importanza dell'uso appropriato dei fattori di conversione e dei rapporti stechiometrici [49].

Ora è necessario conoscere le moli di H_2SO_4 che reagiscono completamente con $1,028 \times 10^{-3}$ mol NaOH, usando il corretto rapporto stechiometrico (rs), cioè $rs = 1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4 / 2 \text{ mol NaOH}$:

$$\text{Moli di H}_2\text{SO}_4 \text{ necessarie} = (1,028 \times 10^{-3} \text{ mol NaOH}) \times (1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4 / 2 \text{ mol NaOH}) = 5,140 \times 10^{-4} \text{ mol H}_2\text{SO}_4$$

Per validare o falsificare il risultato ottenuto, dobbiamo riferirci al problema (2) e calcolare le moli di H_2SO_4 presenti in 100,0 mL della soluzione al 2,485% in peso e densità 1,015 g/mL.

Notiamo che, per effetto della diluizione, la quantità di H_2SO_4 presente in 100,0 mL è la stessa che in 10,00 mL e siccome si utilizzano solo 20,00 mL della soluzione diluita, questo equivale a considerare 1/5 dei 10,00 mL iniziali: è come se la soluzione iniziale fosse 2,000 mL *slz* (*slz* sta per soluzione e sottolinea il fatto che non si riferisce al solo H_2SO_4).

Pertanto, i 20,00 mL della soluzione diluita contengono la stessa quantità di H_2SO_4 presente in 2,000 mL della soluzione iniziale e per calcolare la massa di questa soluzione, si usa la densità come fattore di conversione:

$$2,000 \text{ mL } slz = (2,000 \text{ mL } slz) \times (1,015 \text{ g } slz / \text{mL } slz) = 2,030 \text{ g } slz \text{ H}_2\text{SO}_4 \text{ (soluzione al 2,485\% in peso)}$$

Infine, per calcolare la massa di H_2SO_4 assoluto, si applica la proporzione:

$$100,0 \text{ g } slz : 2,485 \text{ g H}_2\text{SO}_4 = 2,030 \text{ g } slz : x \text{ g H}_2\text{SO}_4$$

$$x = 5,044 \times 10^{-2} \text{ g H}_2\text{SO}_4 \equiv 5,143 \times 10^{-4} \text{ mol H}_2\text{SO}_4$$

Concludendo, nei 20,00 mL della soluzione diluita sono presenti $5,143 \times 10^{-4}$ mol H_2SO_4 , valore coincidente (entro gli arrotondamenti) con quello ricavato precedentemente, pari a $5,140 \times 10^{-4}$ mol H_2SO_4 . Questa verifica, ancorché non esaustiva, avrebbe permesso di non considerare come corrette diverse soluzioni con errori concettuali. Viene consigliato di utilizzare per la densità le dimensioni grammi di soluzione per mL di soluzione (g *slz*/mL *slz*), un accorgimento che può aiutare gli studenti a evitare un errore comune, ovvero quello di considerare la massa della soluzione come coincidente con quella del soluto.

6. Equilibri ionici

Si riporta ora un ultimo esempio per illustrare la verifica nel caso dei problemi sugli equilibri chimici, considerando il caso degli equilibri ionici. Oltre al bilancio di massa e la verifica della costante di equilibrio, per i problemi sugli equilibri ionici è necessario controllare il bilancio di carica. Il metodo generale per risolvere questo tipo di problemi con vari esempi di calcolo si può trovare in un articolo pubblicato su *CnS* [50].

L'uso di questo metodo per i problemi sugli equilibri ionici permette di risolvere i problemi attraverso un ragionamento chimico e di ottenere risultati con errore relativo inferiore all'1%. Tale metodo viene illustrato considerando il calcolo del pH di un acido poliprotico; esempi simili si possono trovare anche nei testi di chimica generale [51, 52].

Problema (4)

Calcolare il pH di una soluzione ottenuta aggiungendo 99,0 mL di NaOH 0,100 M a 50,0 mL di H_2CO_3 (CO_2 disciolta in acqua) 0,100 M, nell'ipotesi che i volumi siano additivi. ($K_{a1} = 4,31 \times 10^{-7}$ M; $K_{a2} = 5,60 \times 10^{-11}$ M)

Le moli della base reagiscono con quelle dell'acido in base a due reazioni successive.

Per quanto riguarda la prima reazione, indicando con **p** la situazione iniziale e con **d** quella a fine processo, si ha:

	H_2CO_3	+	NaOH	$\longrightarrow$	NaHCO_3	+	H_2O
<i>p</i>	$5,00 \times 10^{-3}$		$9,99 \times 10^{-3}$		0		0
<i>d</i>	0		$4,90 \times 10^{-3}$		$5,00 \times 10^{-3}$		$5,00 \times 10^{-3}$

Considerando ora la seconda reazione e indicando con ***p'*** la situazione all'inizio di tale processo e ***d'*** a reazione avvenuta, si ha:

	NaHCO_3	+	NaOH	$\longrightarrow$	Na_2CO_3	+	H_2O
<i>p'</i>	$5,00 \times 10^{-3}$		$4,90 \times 10^{-3}$		0		0
<i>d'</i>	$1,00 \times 10^{-4}$		0		$4,90 \times 10^{-3}$		$4,90 \times 10^{-3}$

A seguito del mescolamento dei due reagenti, il volume totale è:

$$V_{\text{tot}} = 99,0 \text{ mL} + 50,0 \text{ mL} = 149,0 \text{ mL}$$

Le concentrazioni di HCO_3^- e CO_3^{2-} sono pertanto:

$$[\text{NaHCO}_3] = 1,00 \times 10^{-4} \text{ mol} / 1,49 \times 10^{-1} \text{ L} = 6,71 \times 10^{-4} \text{ M} = [\text{HCO}_3^-]$$

$$[\text{Na}_2\text{CO}_3] = 4,90 \times 10^{-3} \text{ mol} / 1,49 \times 10^{-1} \text{ L} = 3,29 \times 10^{-2} \text{ M} = [\text{CO}_3^{2-}]$$

La presenza di HCO_3^- e CO_3^{2-} fa supporre la presenza di una soluzione tampone e si procede al calcolo del pH con l'equazione di Henderson-Hasselbalch:

$$[\text{H}^+] = K_{\text{a}2} [\text{HCO}_3^-] / [\text{CO}_3^{2-}] = 1,14 \times 10^{-12} \text{ M}$$

Il pH della soluzione tampone è, pertanto, 11,94

La verifica del risultato ottenuto può essere fatta attraverso il calcolo delle concentrazioni molari delle specie ioniche positive e negative presenti in soluzione:

$$[\text{Na}^+] = (9,90 \times 10^{-3} \text{ mol}) / (1,49 \times 10^{-1} \text{ L}) = 6,64 \times 10^{-2} \text{ M}$$

$$[\text{OH}^-] = K_{\text{w}} / [\text{H}^+] = 8,77 \times 10^{-3} \text{ M}$$

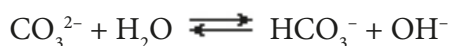
$$[\text{Na}^+] + [\text{H}^+] = 6,64 \times 10^{-2} + 1,14 \times 10^{-12} = 6,64 \times 10^{-2} \text{ M}$$

$$[\text{OH}^-] + [\text{HCO}_3^-] + 2[\text{CO}_3^{2-}] = 8,77 \times 10^{-3} + 6,71 \times 10^{-4} + 2 \times 3,29 \times 10^{-2} = 7,53 \times 10^{-2} \text{ M}$$

Dai calcoli effettuati si evince che la condizione di elettro-neutralità della soluzione non è verificata:

$$[\text{Na}^+] + [\text{H}^+] \neq [\text{OH}^-] + [\text{HCO}_3^-] + 2[\text{CO}_3^{2-}]$$

Pertanto, la soluzione trovata non può essere accettata. Lo studente, riflettendo su quanto ha studiato si rende conto che in una soluzione contenente NaHCO_3 e Na_2CO_3 si stabiliscono diversi equilibri, che vanno tutti considerati, incominciando con l'equilibrio che ha il valore di K maggiore, cioè quello relativo alla reazione di idrolisi dello ione carbonato:



Se nella reazione si producono $r \text{ mol L}^{-1}$ di OH^- , indicando con ***i*** la situazione all'inizio (non equilibrio) e con ***e*** la situazione all'equilibrio, si ha:

	CO_3^{2-}	+	H_2O	$\rightleftharpoons$	HCO_3^-	+	OH^-
<i>i</i>	$3,29 \times 10^{-2}$				$6,71 \times 10^{-4}$		0
<i>e</i>	$3,29 \times 10^{-2} - r$				$6,71 \times 10^{-4} + r$		<i>r</i>

La soluzione numerica comporta che *r* deve essere compreso nell'intervallo $0 < r < 3,29 \times 10^{-2}$ M. Per questo equilibrio vale la costante di idrolisi K_{h2} :

$$K_{h2} = [\text{HCO}_3^-] \times [\text{OH}^-] / [\text{CO}_3^{2-}] = K_w / K_{a2} = 1,78 \times 10^{-4} \text{ M}$$

$$K_{h2} = (6,71 \times 10^{-4} + r) \times (r) / (3,29 \times 10^{-2} - r) = 1,78 \times 10^{-4} \text{ M}$$

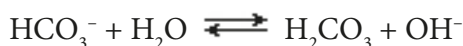
Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$r = [\text{OH}^-] = 2,03 \times 10^{-3} \text{ M}$$

$$[\text{HCO}_3^-] = 2,70 \times 10^{-3} \text{ M}$$

$$[\text{CO}_3^{2-}] = 3,08 \times 10^{-2} \text{ M}$$

Ora va considerato il seguente equilibrio:



Per questo equilibrio, $K_{h1} = [\text{H}_2\text{CO}_3] \times [\text{OH}^-] / [\text{HCO}_3^-] = K_w / K_{a1}$

Se per raggiungere l'equilibrio si producono *s* mol L⁻¹ di OH⁻, si ha:

Quindi:

	HCO_3^-	+	H_2O	$\rightleftharpoons$	H_2CO_3	+	OH^-
<i>i</i>	$2,70 \times 10^{-3}$				0		$2,03 \times 10^{-3}$
<i>e</i>	$2,70 \times 10^{-3} - s$				<i>s</i>		$2,03 \times 10^{-3} + s$

$$K_{h1} = (2,03 \times 10^{-3} \text{ M} + s \text{ M}) \times (s \text{ M}) / (2,70 \times 10^{-3} \text{ M} - s \text{ M}) = 2,32 \times 10^{-8} \text{ M}$$

La soluzione numerica comporta che *s* debba essere compreso nell'intervallo $0 < s < 2,70 \times 10^{-3}$ M, per cui:

$$s = [\text{H}_2\text{CO}_3] = 3,09 \times 10^{-8} \text{ M}$$

$$[\text{HCO}_3^-] = (2,70 \times 10^{-3} - s) \text{ M} = 2,70 \times 10^{-3} \text{ M} \text{ (il valore di } s, \text{ pari a } 3,09 \times 10^{-8} \text{ M, è trascurabile)}$$

$$[\text{OH}^-] = (2,03 \times 10^{-3} + s) \text{ M} = 2,03 \times 10^{-3} \text{ M} \text{ (il valore di } s, \text{ pari a } 3,09 \times 10^{-8} \text{ M, è trascurabile)}$$

Considerando ora la dissociazione dell'acqua e ammettendo che per raggiungere l'equilibrio si producano *t* mol L⁻¹ di H⁺, si ha:

	H_2O	$\rightleftharpoons$	H^+	+	OH^-
<i>i</i>			0		$2,03 \times 10^{-3}$
<i>e</i>			<i>t</i>		$2,03 \times 10^{-3} + t$

La soluzione numerica comporta che t deve essere compreso nell'intervallo $0 < t < 1,00 \times 10^{-7}$ M e il suo valore è ottenuto risolvendo la seguente equazione:

$$K_w = [H^+] \times [OH^-] = (t) \times (2,03 \times 10^{-3} + t) = 1,00 \times 10^{-14} \text{ M}^2$$

$t = [H^+] = 4,93 \times 10^{-12}$ M (soluzione ricavata considerando trascurabile il contributo t alla concentrazione di OH^-)

$$pH = 11,31$$

Questa volta la soluzione è corretta?

Per verificare il risultato ottenuto si può procedere come segue.

- Determinazione dell'elettroneutralità della soluzione:

$$[Na^+] + [H^+] = 6,64 \times 10^{-2} \text{ M}$$

$$[OH^-] + [HCO_3^-] + 2[CO_3^{2-}] = 6,63 \times 10^{-2} \text{ M}$$

- Calcolo delle costanti di dissociazione acida:

$$[H^+] \times [HCO_3^-] / [H_2CO_3] = 4,31 \times 10^{-7} \text{ M}$$

$$[H^+] \times [CO_3^{2-}] / [HCO_3^-] = 5,62 \times 10^{-11} \text{ M}$$

- Calcolo del bilancio di massa:

$$[H_2CO_3] + [HCO_3^-] + [CO_3^{2-}] = 3,35 \times 10^{-2} \text{ M}$$

$$C_a = \text{concentrazione totale dell'acido} = (5,00 \times 10^{-3} \text{ mol } H_2CO_3) / (1,49 \times 10^{-1} \text{ L}) = 3,36 \times 10^{-2} \text{ M}$$

La soluzione è accettabile e l'errore relativo che si avrebbe con l'uso dell'equazione di Henderson-Hasselbalch è del 76,8%.

Ma come sarebbe possibile scoprire che il valore trovato non è accettabile, in assenza della verifica? In genere, in Chimica Generale, ma anche in Chimica Analitica, nei calcoli relativi agli equilibri ionici viene utilizzata la regola dell'approssimazione del 5% [53-56]; errori superiori andrebbero evitati, anche per non dare cattivo esempio agli studenti. La verifica dei calcoli è una procedura utile anche per chi insegna; due libri di testo riportano lo stesso problema con gli stessi dati (la concentrazione di tutte le specie in una soluzione di acido fosforico 0,100 M), ma i due risultati sono molto diversi: $[HPO_4^{2-}] = 6,2 \times 10^{-8}$ M in un caso [57] e $1,96 \times 10^{-7}$ M nell'altro [58], tanto da differire del 216%.

7. Conclusioni

Esiste da tempo un dibattito sulla valorizzazione degli errori e sull'errore produttivo [59]. L'applicazione del metodo didattico dell'errore produttivo alla risoluzione dei problemi prevede due fasi: una prima fase di generazione di soluzioni anche sbagliate, seguita da una fase di istruzione diretta, ove viene insegnato il procedimento corretto. L'obiettivo è quello di dare agli studenti l'opportunità di usare le conoscenze pregresse, sia formali che intuitive, e le risorse a loro disposizione per produrre soluzioni a un problema, anche complesso, un problema che richiede passaggi o procedure che gli studenti non hanno ancora appreso [60].

Affinché un errore abbia degli aspetti didattici positivi è necessario che chi lo commette abbia la consapevolezza di aver sbagliato [61, 62]. Questo può avvenire se un esperto lo evidenzia correggendo il procedimento, oppure se la verifica mette in evidenza un risultato sbagliato (Figura10).

$$\left\{ \begin{array}{l} K_a = 8,347 \cdot 10^{-7} \text{ M} \\ K_a = \frac{8,465 \cdot 10^{-7} \cdot 8,347 \cdot 10^{-7}}{(8,750 - 8,347) \cdot 10^{-7}} = 175,33 \cdot 10^{-7} = 1,753 \cdot 10^{-9} \text{ M} \end{array} \right.$$

a) DOVE SBAGLIO?

b) ci sono ERRORI CONCETTUALI??

Figura 10. Lo studente ha risolto correttamente l'esercizio, ma nella fase della verifica trova un valore della K_a diverso da quello aspettato per un errore di conversione; riporta, infatti $175,3 \times 10^{-7} = 1,753 \times 10^{-9}$ invece di $175,3 \times 10^{-7} = 1,753 \times 10^{-5}$ (valore atteso)

Quanto appare nella figura 10 non va sottovalutato; lo studente è profondamente coinvolto nel processo risolutivo e dalla verifica è in qualche modo costretto a mettere in dubbio la propria soluzione. Deve andare alla ricerca dell'errore nei passaggi e rivedere il suo ragionamento. Nello studente che esegue la verifica possiamo riconoscere uno studente motivato e desideroso di migliorare le proprie abilità nel problem solving. La verifica offre allo studente la possibilità di scoprire i propri errori, senza l'intervento di un esperto, e con l'esercizio è in grado di sviluppare in modo autonomo le proprie abilità e competenze nella soluzione dei problemi. Un risultato formativo notevole di qualunque processo educativo.

Ringraziamenti

Ringrazio un anonimo revisore che mi ha permesso di correggere qualche errore di calcolo e per i suggerimenti che hanno migliorato la qualità dell'articolo.

Riferimenti bibliografici

- [1] D. R. Krathwohl, A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview, *Theory Into Practice*, 2002, **41**, 212-218.
- [2] G. Tsaparlis, U. Zoller, M. Fastow, A. Lubezky, Students' Self-Assessment in Chemistry Examinations Requiring Higher- and Lower-Order Cognitive Skills, *Journal of Chemical Education*, 1999, **76**, 112-113.
- [3] R. S. Nickerson, D. N. Perkins, E. E. Smith, *The teaching of thinking*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1985, p. 323.
- [4] J. R. Anderson, *Cognitive psychology and its implications*, Fourth Ed., W. H. Freeman, New York, 1995, p. 237.
- [5] D. H. Jonassen, *Learning to solve problems: a handbook for designing problem-solving learning environments*, Routledge, New York, 2011, p. xvii-xviii.
- [6] H. Buff, *Stöchiometrie. Ein leitfaden zur kenntniss und anwendung der lehre von den bestimmten chemischen proportionen*. Campeschen Officin, Nürnberg, 1829.
- [7] H. Kramers-Pals, J. Lambrechts, P. J. Wolff, Recurrent difficulties: Solving quantitative problems. *Journal of Chemical Education*, 1982, **59**, 509-513.
- [8] M. Frazer, R. Sleet, A study of students' attempts to solve chemical problems, *European Journal of Science Education*, 1984, **6**, 141-152.
- [9] D. Gabel, K. Samuel, High school students' ability to solve molarity problems and their analogue counterparts, *Journal of Research in Science Teaching*, 1986, **23**, 165-176.
- [10] J. D. Herron, T. J. Greenbowe, What can we do about Sue: A case study of competence, *Journal of Chemical Education*, 1986, **63**, 528-531.
- [11] M. Niaz, The relationship between M-demand, algorithms, and problem solving: A neo-piagetian analysis, *Journal of Chemical Education*, 1989, **66**, 422-424.
- [12] G. M. Bodner, I have found you an argument: The conceptual knowledge of beginning chemistry graduate students, *Journal of Chemical Education*, 1991, **68**, 385-388.
- [13] J. Cohen, M. Kennedy-Justice, et al., Encouraging meaningful quantitative problem solving, *Journal of Chemical Education*, 2000, **77**, 1166-1173.
- [14] A. H. Johnstone, Can problem solving be taught? *University Chemistry Education*, 2001, **5**, 69-73.
- [15] G. M. Bodner, J. D. Herron, Problem-solving in chemistry. In J. K. Gilbert, O. De Jong, R. Justi, D. F. Treagust, J. H. Van Driel (a cura di), *Chemical education: Towards research-based practice* (pp 235-266). Kluwer, New York, 2003.
- [16] M. S. Cracolice, J. C. Deming, B. Ehlert, Concept learning versus problem solving: A cognitive difference, *Journal of Chemical Education*, 2008, **85**, 873-878.
- [17] A. L. Chandrasegaran, D. F. Treagust, et al., Students' dilemmas in reaction stoichiometry problem solving: Deducing the limiting reagent in chemical reactions, *Chemistry Education Research and Practice*, 2009, **10**, 14-23.
- [18] M. C. Sostarecz, A. G. Sostarecz, A conceptual approach to limiting-reagent problems, *Journal of Chemical Education*, 2012, **89**, 1148-1151.

- [19] O. Gulacar, T. L. Overton, et al., A novel code system for revealing sources of students' difficulties with stoichiometry, *Chemistry Education Research and Practice*, 2013, **14**, 507-515.
- [20] E. Yuriev, S. Naidu, et al., Scaffolding the development of problem-solving skills in chemistry: Guiding novice students out of dead ends and false starts, *Chemistry Education Research and Practice*, 2017, **18**, 486-504.
- [21] M. Shadreck, O. C. Enunuwe, Recurrent difficulties: Stoichiometry problem-solving, *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences*, 2018, **14**, 25-31.
- [22] K. Vo, M. Sarkar, et al., Problem solving in chemistry supported by metacognitive scaffolding: teaching associates' perspectives and practices, *Chemistry Education Research and Practice*, 2022, **23**, 436-451.
- [23] G. Polya, *How to Solve it. A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973, p. xvii.
- [24] A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York, 1985.
- [25] P. Liljedahl, M. Santos-Trigo (a cura di), *Mathematical Problem Solving. Current Themes, Trends, and Research*, Springer Nature, Cham, Switzerland, 2019.
- [26] D. J. Herron, *The chemistry classroom: Formulas for successful teaching*, American Chemical Society, Washington, DC, 1996, pp. 73-75.
- [27] D. Frank, Implementing instruction to improve the problem-solving abilities of general chemistry students (Doctoral dissertation, Purdue University, 1985). *Dissertation Abstracts International*, 1986, **47**(1), 141-A.
- [28] C. S. Dweck, Motivational processes affecting learning, *American Psychologist*, 1986, **41**, 1040-1048.
- [29] K. Amrai, S. E. Motlagh, et al., The relationship between academic motivation and academic achievement students, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2011, **15**, 399-402.
- [30] C. Romero, A. Master, et al., Academic and emotional functioning in middle school: The role of implicit theories, *Emotion*, 2014, **14**, 227-234.
- [31] K. A. Renninger, S. E. Hidi, *The power of interest for motivation and engagement*. Routledge, New York, 2016.
- [32] R. M. Ryan, E. L. Deci, Intrinsic and extrinsic motivation from a self-determination theory perspective: Definitions, theory, practices, and future directions, *Contemporary Educational Psychology*, 2020, **61**, 101860.
- [33] R. Pekrun, H. W. Marsh, et al., School grades and students' emotions: Longitudinal models of within-person reciprocal effects, *Learning and Instruction*, 2023, **83**, 101626.
- [34] E. Santana-Monagas, F. Núñez-Regueiro, J. L. Núñez, Does motivation lead to academic success, or conversely? Reciprocal relations between autonomous and controlled motivation, and mathematics achievement, *British Journal of Educational Psychology*, 2025, **95**, 513-529.
- [35] Rif. 23, pp. 14-15.
- [36] L. Cardellini, *Strategie per il Problem Solving in Chimica*, Libreria Scientifica Ragni, Ancona, 2014, pp. 109-110.
- [37] V. Roadrangka, R. H. Yeany, M. J. Padilla, *The construction and validation of group assessment of logical thinking (GALT)*. Paper presented at the annual meeting of the National Association for Research in Science Teaching, Dallas, TX, 1983.
- [38] D. M. Bunce, K. D. Hutchinson, The use of the GALT (Group Assessment of Logical Thinking) as a predictor of academic success in College Chemistry, *Journal of Chemical Education*, 1993, **70**, 183-187.
- [39] L. Bird, Logical reasoning ability and student performance in general chemistry, *Journal of Chemical Education*, 2010, **87**, 541-546.
- [40] Rif. 36, pp. 13-14.
- [41] M. T. H. Chi, R. Glaser, Overview, in M. T. H. Chi, R. Glaser, M. J. Farr (a cura di), *The Nature of Expertise* (pp. xv-xxviii). Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1988.

- [42] L. Cardellini, Moli di reazione che avvengono: un concetto utile nella stechiometria, *La Chimica nella Scuola*, 1995, **17**, 19-21.
- [43] Rif. 36, pp. 26-27.
- [44] D. H. Schunk, F. Pajares, The Development of Academic Self-Efficacy. In A. Wigfield, J. S. Eccles (a cura di), *Development of Achievement Motivation* (pp. 15-31). Academic Press, San Diego, CA, 2002.
- [45] L. Cardellini, Ragionamenti fondamentali nel calcolo stechiometrico. Superare le difficoltà con la densità, *La Chimica nella Scuola*, 2019, **41**, 25-83.
- [46] G. A. Miller, The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information, *Psychological Review*, 1956, **63**, 81-97.
- [47] A. H. Johnstone, New stars for the teacher to steer by? *Journal of Chemical Education*, 1984, **61**, 847-849.
- [48] J. Sweller, P. Ayres, S. Kalyuga, *Cognitive Load Theory*, Springer, New York, 2011.
- [49] L. Cardellini, Fattori di conversione e rapporti stechiometrici: strumenti logici per la risoluzione dei problemi, *La Chimica nella Scuola*, 1996, **18**, 148-151.
- [50] L. Cardellini, Come risolvere i problemi sugli equilibri ionici, *La Chimica nella Scuola*, 2001, **23**, 84-90.
- [51] T. L. Brown, H. E. LeMay, et al., *Chemistry: The Central Science*, 14e, Pearson, Harlow (UK), 2018, pp. 732-733.
- [52] R. H. Petrucci, F. G. Herring, et al., *General Chemistry: Principles and modern applications*, 11th Ed., Pearson Canada, Ontario (Canada), 2017, Ch. 17.
- [53] Rif. 51, p. 727.
- [54] Rif. 52, p. 755.
- [55] J. N. Butler, *Ionic Equilibrium. A Mathematical Approach*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1964, p. vi.
- [56] J.-L. Burgot, *Ionic Equilibria in Analytical Chemistry*, Springer, New York, 2012, p. 88.
- [57] M. J. Sienko, *Equilibrium*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1964, p. 404.
- [58] P. Nylén, N. Wigren, *Stechiometria*, CEDAM, Padova, 1971, pp. 174-175.
- [59] M. Kapur, *Productive failure. Unlocking deeper learning through the science of failing*, Jossey-Bass, San Francisco, 2025.
- [60] M. Kapur, K. Bielaczyc, Classroom-based experiments in productive failure. In L. Carlson, C. Hölscher, T. Shipley (a cura di), *Proceedings of the 33rd annual conference of the Cognitive Science Society* (pp. 2812-2817), Cognitive Science Society, Austin, 2011.
- [61] L. Cardellini, J. Pascual-Leone, On mentors, cognitive development, education, and constructivism: An interview with Juan Pascual-Leone, *Journal of Cognitive Education and Psychology*, 2004, **4**, 199-219.
- [62] L. Cardellini, The foundations of radical constructivism: An interview with Ernst von Glasersfeld, *Foundations of Chemistry*, 2006, **8**, 177-187.